UNIVERSITE DE PARIS-DAUPHINE **Avril 2018**
Equipe pédagogique d'économétrie I

LICENCE GEDESS MENTION : ECONOMIE APPLIQUEE et SCIENCES DE LA SOCIETE

ECONOMETRIE I

Durée de l'épreuve : 2 heures

Tous les documents sont interdits, seules les calculatrices autorisées peuvent être utilisées. La correction tiendra compte de la présentation de la copie, de sa lisibilité et de la clarté de la présentation des résultats.

Des points de présentation pourront être retirés à la discrétion du correcteur.

Exercice 1. ***D'après Marno Verbeek, « A guide to modern Econometrics », 5e édition, Wiley 2012. (6 pts)***

L'auteur a spécifié une fonction de demande de bière au Royaume Uni sur 30 ans :

[1] $\text{LBeer}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \text{LPb}_t + \alpha_2 \text{LPc}_t + \alpha_3 \text{LPa}_t + \alpha_4 \text{LRD}_t + \varepsilon_t$
avec :
LBeer_t : le logarithme de la quantité demandée de bière de l'année t.
LPb_t : le logarithme du prix du litre de bière,
LPc_t : le logarithme du prix du litre d'une boisson gazeuse bien connue,
LPa_t : le logarithme du prix des autres biens et services,
LRD_t : le logarithme du revenu disponible des ménages.
ε_t : terme d'erreur répondant aux hypothèses stochastiques classiques.

Selon l'hypothèse d'absence de phénomène d'illusion monétaire[1], un accroissement de x% du revenu et de l'ensemble des prix doit demeurer sans effet sur la demande de bière.
Le tableau ci-dessous reproduit le résultat de l'estimation de cette fonction de demande sur la base d'un échantillon chronologique annuel de n = 30 ans.

Variable à expliquer : LBEER

Nombre d'observations : 30				
Variables	Coefficient	Ecart type	t-Statistic	Prob
LPB	-1,020419	0,239042	-4,268787	0,0002
LPC	-0,582934	0,560150	-1,040674	0,3080
LPA	0,209545	0,079693	2,629415	0,0144
LRD	0,922864	0,415514	2,221016	0,0356
C	-3,243238	3,743000	-0,866481	0,3945

R^2= 0,825 ; Somme des carrées résidus = 0,0899

[1] Il y a absence d'illusion monétaire si l'effet de l'augmentation des trois prix est exactement compensé par l'effet de l'augmentation du revenu, c'est-à-dire si $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0$.

1°) Quelle est la variation en % de la demande de bière induite **(1 pt)**

- par une variation de 1 % du revenu ?
- par une variation de 1 % de tous les prix ?

2°) On a procédé à l'estimation de deux autres modèles :

[2] $LBeer_t = \alpha_0 + \alpha_1 (LPb_t + LRD_t) + \alpha_2 (LPc_t + LRD_t) + \alpha_3 (LPa_t + LRD_t) + \varepsilon_t$

[3] $LBeer_t = \alpha_0 + \alpha_1 (LPc_t + LPb_t) + \alpha_2 (LPa_t + LPb_t) + \alpha_3 (LRD_t + LPb_t) + \varepsilon_t$

A partir des résultats d'estimation ci-dessous, testez l'hypothèse nulle d'absence d'illusion monétaire pour la demande de bière. **(3 pts)**

Variable à expliquer : LBEER

Nombre d'observations : 30				
Variables	Coefficient	Ecart type	t-Statistic	Prob
C	-4,797798	3,713905	-1,291847	0,2078
LPB+LRD	-1,299386	0,165738	-7,840022	0,0000
LPC+LRD	0,186816	0,284383	0,656916	0,5170
LPA+LRD	0,166742	0,077075	2,163369	0,0399
R^2 =	0,807949	Somme des carrées résidus =		0,098901

Variable à expliquer : LBEER

Nombre d'observations : 30				
Variables	Coefficient	Ecart type	t-Statistic	Prob
C	1,411305	3,269898	0,431605	0.6696
LPC+LPB	-1,364007	0,457103	-2,984024	0.0061
LPA+LPB	0,259543	0,081463	3,186037	0.0037
LRD+LPB	0,580420	0,410312	1,414581	0.1691
R^2 =	0,792778	Somme des carrées résidus =		0,106714

3°) On s'intéresse à la stabilité dans le temps de la relation qui unit la demande de bière à ses déterminants. On se demande, en particulier, si la relation ne se serait pas déformée depuis la période 15. En vous servant des informations contenues dans les estimations ci-dessous, testez l'hypothèse nulle de stabilité de la relation sur les deux sous-périodes. **(2 pts)**

Sous période 1 : t = 1, 15 ; Variable à expliquer : LBEER

Variables	Coefficient	Ecart type	t-Statistic	Prob
LPA	0,260832	0,081142	3,214500	0,0093
LPB	-1,122347	0,232213	-4,833271	0,0007
LPC	-1,212823	0,708379	-1,712110	0,1177
LRD	1,626704	0,635879	2,558198	0,0285
C	-9,084724	5,557187	-1,634770	0,1331
R² =	0,915764	Somme des carrées résidus =		0,00889

Sous période 2 : t = 16, 30 ; Variable à expliquer : LBEER

Variables	Coefficient	Ecart type	t-Statistic	Prob
LPA	0,041158	0,191979	0,214387	0,8346
LPB	-0,407875	0,777733	-0,524440	0,6114
LPC	-0,671486	1,017553	-0,659903	0,5242
LRD	0,317952	0,850086	0,374024	0,7162
C	2,584614	8,097051	0,319204	0,7561
R² =	0,295054	Somme des carrées résidus =		0,04317

Exercice 2. (6 pts)

On a procédé à l'estimation suivante sur un échantillon en coupe instantanée de n = 92 observations. Le résultat de cet ajustement est produit ci-dessous.

Variable à expliquer Y				
Nombre d'observations : 92				
Variable	Coefficient	Ecart type	t-Statistic	Prob
C	1,048210	0,101819	10,29484	0,0000
X	0,969320	0,092429	10,48715	0,0000
R² =	0,549956	Statistique de Durbin et Watson		2,070894

1) Commentez d'un point de vue statistique les résultats de cette estimation **(1 pt)**

2) Nous avons réestimé ce modèle et nous obtenons maintenant les résultats suivants :

Variable à expliquer Y				
Nombre d'observations : 92				
Variable	Coefficient	Ecart type	t-Statistic	Prob
C	1,048210	0,101819	10,29484	0,0000
X	0,969320	0,092429	10,48715	0,0000
R² =	0,549956	Statistique de Durbin et Watson		1,179876

Quelle différence observez-vous entre ces deux modèles et d'où provient-elle ? Commentez à nouveau les résultats obtenus. **(2 pts)**

3) Enfin nous avons estimé le modèle suivant dans lequel : RES^2 n'est autre que le résidu d'estimation au carré du modèle précédent et X^2 la variable X au carré.

Variable à expliquer : RES^2			
Nombre d'observations : 92			
Variable	Coefficient	Ecart type	t-Statistic
C	0,387598	0,219954	1,762174
X	-0,199241	0,090087	2,21651
X^2	0,449425	0,109925	4,088458

Quel est l'intérêt de cette estimation ? Quelle conclusion en tirez-vous en ce qui concerne la méthode d'estimation de ce modèle ? **(3 pts)**

Exercice 3. *Étude d'une fonction de coûts de type Cobb-Douglass (8 points)*

Afin d'étudier les rendements d'échelles de l'offre de 29 entreprises d'électricité aux USA en 2015, on a étudié la fonction de coût suivante :

$$\text{Log } CT = \text{Log } M + \frac{a_1}{r} \text{ Log } P_L + \frac{a_2}{r} \text{ Log } P_K + \frac{a_3}{r} \text{ Log } P_F + \frac{1}{r} \text{ Log } Y + \varepsilon$$

Où :
CT = coût total de production,
M = constante,
a_1, a_2, a_3, r coefficients du modèle,
P_L = taux de salaire,
P_K = prix du capital,
P_F = prix du Fuel,
Y = production en Kilowatts Heures,
ε = terme d'erreur répondant aux hypothèses stochastiques classiques.

1) On note : ct = Log CT ; m = Log M ; l = Log P_L ; k = Log P_K ; f = Log P_F ; y = Log Y et $\alpha_1 = \frac{a_1}{r}$; $\alpha_2 = \frac{a_2}{r}$; $\alpha_3 = \frac{a_3}{r}$; $\alpha_4 = \frac{1}{r}$.

Écrire le modèle sous forme matricielle en précisant bien le format des matrices. **(1 pt)**

2) L'estimation économétrique de ce modèle conduit aux résultats suivants :
$ct = -4{,}93 + 0{,}41\, l + 0{,}26\, k + 0{,}44\, f + 0{,}94\, y + e$
Nombre d'observations : 29
$R^2 = 0{,}89$
Somme des carrés des résidus = 0,34

On donne la matrice

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}1281 & 0{,}4576 & 0{,}1571 & -0{,}1145 & 0{,}0024 \\ & 0{,}0512 & 0{,}0171 & -0{,}0033 & 0{,}1147 \\ & & 0{,}0893 & 0{,}0058 & -0{,}0237 \\ & & & 0{,}0044 & 0{,}4571 \\ & & & & 0{,}0687 \end{bmatrix}$$

Le coefficient α_2 est-il significativement différent de 0 ? **(1 pt)**

3) Les rendements d'échelles sont-ils significativement croissants ? Vous donnerez une approximation de la probabilité critique du test ? **(2 pts)**
On rappelle que les rendements d'échelle sont croissants si : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > 1$

4) On désire tester une éventuelle hétéroscédasticité à l'aide du test de Golfeld-Quandt.

On trouve la statistique empirique suivante : $= \dfrac{0{,}55/8}{0{,}24/8}$.

Expliciter le test de Goldfeld-Quandt et la manière dont cette statistique a été calculée. Conclusion. **(2 pts)**

5) Effectuer, au seuil de 5%, le test d'hypothèses jointes suivant : H0 : $\begin{bmatrix} \alpha_1 = 0{,}5 \\ \alpha_3 = 0{,}5 \end{bmatrix}$.

Vous préciserez les hypothèses alternatives H1 ? **(2 pts)**

Corrigé Avril 2018

Exercice 1

1°) Le modèle est log-log. Les coefficients peuvent être interprétés comme des élasticités. Si le revenu augmente de 1 %, la demande bière augmentera, *ceteris paribus*, de 0,92 %. **(0,5 pt)**
De même, si les 3 prix augmentent chacun de 1 %, la demande bière variera de – 1,39 %. **(0,5 pt)**

2°) Il y a absence d'illusion monétaire si l'effet de l'augmentation des trois prix et exactement compensé par l'effet de l'augmentation du revenu, c'est-à-dire si $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0$.

Soit le modèle [2] :

$$\text{LBeer}_t = \alpha_0 + \alpha_1 (\text{LPb}_t + \text{LRD}_t) + \alpha_2 (\text{LPc}_t + \text{LRD}_t) + \alpha_3 (\text{LPa}_t + \text{LRD}_t) + \varepsilon_t$$

Qui s'écrit aussi :

$$\text{LBeer}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \text{LPb}_t + \alpha_2 \text{LPc}_t + \alpha_3 \text{LPa}_t + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \text{LRD}_t + \varepsilon_t$$

Ce modèle [2] peut donc être interprété comme la restriction du modèle [1] correspondant à l'hypothèse d'absence d'illusion monétaire. Le modèle [3] n'est là que pour faire diversion !

$$[1] \quad \text{LBeer}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \text{LPb}_t + \alpha_2 \text{LPc}_t + \alpha_3 \text{LPa}_t + \alpha_4 \text{LRD}_t + \varepsilon_t$$

On teste le bienfondé de la restriction à l'aide d'une statistique de Fisher :
H0 : SRCc = SCR
H1 : SRCc ≠ SCR
SRC = Somme des carrés des résidus du modèle [1] non contraint = 0,0899
SRCc = Somme des carrés des résidus du modèle [2] contraint = 0,098901

$$F^* = \frac{(SCRc - SCR)/1}{(SCR/(n-k-1)} = \frac{(0{,}0989 - 0{,}0899)/1}{(0{,}0899/(25)} = 2{,}497 < F_{1;25}^{0,05} = 4{,}28$$ **(3 pts)**

Nous ne rejetons pas l'hypothèse nulle. Il y a donc absence d'illusion monétaire.

3°) Stabilité de la relation dans le temps.
Soit le test de Chow

$$F^* = \frac{(SCR - (SCR1 + SCR2))/(k+1)}{(SCR1 + SCR2)/(n - 2(k+1))}$$ qui suit alors une loi de Fisher à $(k+1)$ et $n - 2(k+1)$ degrés de liberté

SRC = Somme des carrés des résidus du modèle [1]
SRC1 = Somme des carrés des résidus du modèle [1] pour la première sous-période
SRC2 = Somme des carrés des résidus du modèle [1] pour la deuxième sous-période

$$F^* = \frac{(0{,}0899 - (0{,}00889 + 0{,}04317))/(5)}{(0{,}00889 + 0{,}04317)/(30-10)} = 2{,}90 > F_{5;20}^{0,05} = 2{,}71$$ **(2 pts)**

Nous rejetons l'hypothèse H0 de stabilité du modèle dans le temps, comme pouvez le laisser présager la non significativité des coefficients par rapport à 0 du modèle de la deuxième sous-période.

Exercice 2. (6 pts)

1) Le coefficient de la variable X est significativement différent de 0, nous ne pouvons pas interpréter la statistique de Durbin et Watson car le modèle est spécifié en coupe instantanée et nous n'avons aucune information sur un éventuel tri des données. **(1 pt)**
Si interprétation de la stat DW ou non mention de la stat DW mettre 0 à la question.

2) Seule la statistique DW est différente. Les données ont donc été triées de manière différente, ce qui a entrainé une valeur du numérateur différente (séquence des résidus différente). Nous ne pouvons donc toujours pas interpréter la stat DW car nous n'avons pas d'information sur un éventuel tri.
Mais si nous faisons l'hypothèse d'un tri adéquat : DW = 1,18 < d1 = 1,63 Il y a donc autocorrélation des erreurs. **(2 pts)**

3) Il s'agit de procéder au test de White, afin de teste une éventuelle hétéroscédascité. **(1 pt)**
Les coefficients des variables X et X² sont significativement différents de 0, il existe donc une relation entre le résidu au carré et les variables, ce qui révèle une hétéroscédascité. **(1 pt)**
Pour corriger cette hétéroscédascité il convient de faire une régression pondérée dont le facteur de pondération est égal à l'inverse du carré de la variable la plus explicative soit 1/X. **(1 pt)**

Exercice 3)

1) Y = X A + ε_t

$$Y=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ .. \\ c_n \end{pmatrix} \; ; = \begin{pmatrix} 1 & l_1 & k_1 & f_1 & y_1 \\ 1 & l_2 & k_2 & f_2 & y_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & l_n & k_n & f_n & y_n \end{pmatrix} \; ; \; \hat{A}=\begin{pmatrix} m \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$ **(1 pt)**

2) Nous calculons la matrice des variances des variances covariances des coefficients :

$$\hat{\Omega}_{\hat{a}} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \times (X'X)^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n-k-1} = \frac{0,34}{29-4-1} = 0,0142$$ **(0,5 pt)**

D'où $\hat{\Omega}_{\hat{a}} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \times (X'X)^{-1} =$

α1	α2	α3	
0,00072533	0,00024225	-0,00004675	α1
0,00024225	0,00126508	0,000082	α2
-0,00004675	0,000082	0,000062	α3

$t_{\hat{\alpha}2}^{*} = \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_2}} = \frac{0,26}{\sqrt{0,00126508}} = 7,31 > t_{24}^{0,05} = 2,03$ Rejet de H0, le coefficient est significativement différent de 0 **(1 pt)**

3) H0 : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ H1 : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > 1$ **(Test unilatéral)**

$$t^* = \frac{\left|\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 - 1\right|}{\hat{\sigma}_{\alpha_1+\alpha_1+\alpha_1}}$$ **(1 pt)**

$\hat{\sigma}^2_{\alpha1+\alpha2+\alpha3}$ = Var(α_1) + Var(α_2) + Var(α_3) + 2 Cov(α_1 α_2) + 2 Cov(α_1 α_3) + 2 Cov(α_2 α_3)
= 0,00072533 + 0,00126508 + 0,000062 + 2 * 0,00024225 - 2 * 0,00004675 + 2 * 0,000082
= 0,00260808

$$t^*_{\hat{a}1} = \frac{1{,}11 - 1}{\sqrt{0{,}00260808}}$$ = 2,15 (Proba critique = 2,22% approximation entre 2 et 3%) **(1 pt)**

4) Test de Goldfeld-Quandt : ce test a pour but de comparer la somme des carrés des résidus d'estimation après avoir scindé les observations en deux sous-échantillons. Pour les modèles en coupe, les données sont triées en fonction des valeurs croissantes ou décroissantes de la variable explicative qui peut être la source de l'hétéroscédasticité (ceci n'est pas nécessaire pour les modèles en série temporelle). Nous effectuons alors deux régressions sur deux sous-échantillons, et à l'aide d'un test de Fisher nous comparons les deux sommes des carrés des résidus (*SCR*1 et *SCR*2). L'hypothèse d'hétéroscédasticité est acceptée s'il existe une différence significative entre les deux sommes des carrés des résidus.
Soit à tester l'hypothèse H0 : *SCR*2 = *SCR*1
Sous l'hypothèse H0 d'homoscédasticité, le rapport :

$$F^* = \frac{(SCR2/(n2-k-1)}{(SCR1/(n1-k-1)} = \frac{0{,}55/8}{0{,}24/8}$$ = 2,29 suit une loi de Fisher à 8 et 8 degrés de liberté. **(1 pt)**

NB : Au numérateur doit figurer le carré moyen le plus élevé afin que le Fisher empirique soit toujours supérieur à 1

F^* = 2,29> $F^{0,05}_{8;8}$ =3,44, l'hypothèse d'homoscédasticité H0 est acceptée, le modèle est donc homoscédastique. **(1pt)**

5) Les hypothèses alternatives H1 sont :
a1 = 0,5 et a3 $\neq$ 0,5
a1 $\neq$0,5 et a3 = 0,5
a1 $\neq$0,5 et a3 $\neq$0,5
(0,5 pt)

F^*= $\frac{1}{q}(\hat{a}_q - a_q)\hat{\Omega}^{-1}_{\hat{a}qq}(\hat{a}_q - a_q)'$ suit une loi de Fisher à q et $n - k - 1$ degrés de liberté. **(0,5 pt)**

Avec $\hat{\Omega}_{\hat{a}\,qq}$ =

0,00072533	-0,00004675
-0,00004675	0,000062

$\hat{\Omega}^{-1}_{\hat{a}qq}$ '

1448,70673	1086,53005
1086,53005	16857,6783

Or sous l'hypothèse H0 : $(\hat{a}_q - a_q)'$ = $\begin{bmatrix} 0{,}41 - 0{,}5 \\ 0{,}44 - 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}09 \\ -0{,}06 \end{bmatrix}$

F^* = $\frac{1}{2}(-0{,}09 \quad -0{,}06)\left[\begin{pmatrix} 1448{,}71 & 1086{,}53 \\ -1131{,}80213 & 16857{,}68 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -0{,}09 \\ -0{,}06 \end{pmatrix}$ = 42,07 **(1 pt)**

Nous refusons l'hypothèse H0.